

نام درس: فرآیندهای تصادفی

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - ریاضی (۱۱۱۱۰۵۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

امام علی<sup>(ع)</sup>: شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

۱. متحرکی را در نظر بگیرید که روی محور خط حقیقی، در هر واحد زمان یک واحد به راست یا یک واحد به چپ می‌رود. اگر این متحرک از مبدا شروع به حرکت کرده باشد، احتمال آنکه پس از ۸ حرکت در نقطه ۴ قرار بگیرد چیست؟

الف.  $\frac{7}{64}$  ب.  $\frac{7}{46}$  ج.  $\frac{6}{47}$  د.  $\frac{6}{74}$

۲. دنباله  $\{A_n\}$  از پیشامدها را صعودی نامند، هرگاه به ازای هر  $n$  داشته باشیم:

الف.  $A_{n+1} \subset A_n$  ب.  $A_n \subset A_{n+1}$  ج.  $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$  د.  $A_n = A_{n+1}$

۳. کدام توزیع زیر دارای ویژگی بی‌حافظگی است؟

الف. پواسن ب. دو جمله‌ای ج. هندسی د. فوق هندسی

۴. اگر  $\varphi(s)$  تابع مولد متغیر تصادفی  $X$  باشد، گشتاور فاکتوریل مرتبه  $K$  ام آن برابر است با:

الف.  $\varphi^{(K)}(1)$  ب.  $\varphi^{(K)}(0)$  ج.  $\varphi^{(1)}(K)$  د.  $\varphi(k)$

۵. عددی به تصادف در فاصله  $(0,1)$  انتخاب می‌کنیم. اگر این عدد برابر  $X$  باشد. سکه‌ای که احتمال آمدن شیر با آن  $X$  است را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه حداکثر ۳ بار شیر بیاید، چیست؟

الف.  $\frac{1}{11}$  ب.  $\frac{2}{11}$  ج.  $\frac{3}{11}$  د.  $\frac{4}{11}$

۶. کدام مورد زیر از ویژگیهای فرآیند پواسن نمی‌باشد؟

الف. نمونه‌های مستقل ب. نمونه‌های مانا ج. پواسن بودن توزیع نمونه‌ها د. مانای اکید

۷. هر ماتریسی که درایه‌های آن نامنفی و مجموع درایه‌های واقع بر هر سطر برابر ۱ باشد ماتریس نامند.

الف. تصادفی مضاعف

ب. تصادفی

د. معکوس پذیر

ج. همانی

$x_1$	-۱	۰	۱
$P(X_1 = x_1)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

۸. در زنجیر قدم زدن تصادفی، با فرض اینکه توزیع  $X_1$  به صورت $P(X_p = 0)$  کدام است؟

الف.  $\frac{8}{25}$  ب.  $\frac{7}{25}$  ج.  $\frac{8}{52}$  د.  $\frac{7}{52}$

نام درس: فرآیندهای تصادفی

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - ریاضی (۱۱۱۱۰۵۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۹. زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید.  $(f_{01}^{(2)}, P_{01}^{(2)})$  کدامند؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الف.  $(\frac{5}{9}, \frac{2}{9})$

ب.  $(\frac{2}{9}, \frac{5}{9})$

ج.  $(\frac{5}{9}, \frac{5}{9})$

د.  $(\frac{2}{9}, \frac{2}{9})$

۱۰. در مسئله ورشکستگی قمارباز با فرض  $P = \frac{1}{3}, a = 2, b = 3$ ، احتمال ورشکستگی شخص  $B$  چقدر است؟

الف.  $\frac{28}{31}$

ب.  $\frac{3}{31}$

ج.  $\frac{22}{31}$

د.  $\frac{23}{31}$

۱۱. در فرآیند شاخه‌ای، اگر  $\mathcal{E}$  (تعداد نوزادان هر فرد) دارای توزیع هندسی به صورت  $P(\mathcal{E} = k) = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots$  باشد، تحت چه شرطی احتمال انقراض  $\frac{p}{q}$  است.

الف.  $q \geq p$

ب.  $q \leq p$

ج.  $q > p$

د.  $q = p$

۱۲. در فرآیند شاخه‌ای، اگر تابع مولد احتمالات تعداد نوزادان هر فرد به صورت  $\varphi(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2$  باشد، احتمال آنکه تعداد اعضای نسل دوم، ۲ نفر باشد، چیست؟

الف.  $\frac{1}{27}$

ب.  $\frac{2}{27}$

ج.  $\frac{5}{27}$

د.  $\frac{6}{27}$

۱۳. کدام مورد درباره فرآیند زاد و مرگ با  $x \geq 0, q_x = \frac{x}{2(x+1)}, p_x = \frac{x+2}{2(x+1)}$  صحیح است؟

الف. تحویل‌ناپذیر و بازگشتی

ب. تحویل‌ناپذیر و گذرا

ج. دارای فضای حالت متناهی

د. تحویل‌ناپذیر نیست.

۱۴. فرض کنید ماتریس احتمال انتقال زنجیری به صورت زیر و توزیع آغازین آن  $\pi_0 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$  باشند، توزیع  $X_1$  چیست؟

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ب.  $(\frac{13}{30}, \frac{11}{30}, \frac{6}{30})$

الف.  $(\frac{11}{30}, \frac{13}{30}, \frac{6}{30})$

د.  $(\frac{11}{30}, \frac{6}{30}, \frac{13}{30})$

ج.  $(\frac{6}{30}, \frac{13}{30}, \frac{11}{30})$

نام درس: فرآیندهای تصادفی  
رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - ریاضی (۱۱۱۱۰۵۳)  
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۱۵. توزیع مانای زنجیر ارنفست ساده، چه نام دارد؟

الف. پواسن      ب. هندسی      ج. نرمال      د. دو جمله‌ای

۱۶. اگر  $X$  یک حالت بازگشتی با  $E_X(T_X) < \infty$  باشد. کدام مورد درباره  $X$  صحیح است؟

الف. بازگشتی پوچ      ب. نادره‌ای      ج. ارگودیک      د. دوره‌ای با دوره ۲

۱۷. کدام زنجیر زیر نادره‌ای است؟

الف. ارنفست ساده      ب. قدم زدن تصادفی ساده

ج. تعدیل یافته ارنفست      د. هر زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی

۱۸. شرط لازم و کافی برای آنکه زنجیر زمان-پیوسته دارای ویژگی مارکف باشد آن است که توزیع زمان‌های توقف..... باشد.

الف. هندسی      ب. نرمال      ج. نمایی      د. بتا

۱۹. هرفرآیند زایشی محض با نرخ ثابت چه نوع فرآیندی است؟

الف. قدم زدن تصادفی      ب. حرکت براونی      ج. پواسن      د. شاخه‌ای

۲۰. توزیع مانای فرآیند جهشی مارکفی با فضای حالت  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  در روابط زیر صادق است، توزیع مانای آن چه نام دارد؟

$$0 = \lambda \pi(0) - (\lambda + \mu) \pi(1) \quad , \quad y \neq 0$$

$$0 = -(\lambda + \mu) \pi(0) + \mu$$

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{ب. هندسی با پارامتر}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{الف. هندسی با پارامتر}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{د. پواسن با پارامتر}$$

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{ج. پواسن با پارامتر}$$

### سؤالات تشریحی

۱. اگر  $A, B$  دو پیشامد دلخواه باشند، مطلوب است تعیین ضریب همبستگی  $I_A, I_B$ . (۱/۵ نمره)

۲. فرض کنید  $\{N(t), t \geq 0\}$  فرآیند پواسنی با پارامتر  $\lambda > 0$ ،  $\{X(t), t \geq 0\}$  فرآیندی به صورت زیر باشند. ثابت کنید این فرآیند

$$X(t) = N(t+1) - N(t) \quad \text{مانا است. (۱/۵ نمره)}$$

۳. زنجیر مارکفی دارای ماتریس احتمالات انتقال زیر است. (۱/۵ نمره)

دسته‌های هم ارزی را مشخص کنید. احتمالات جذب را بیابید.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نام درس: فرآیندهای تصادفی

رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۲۹) - ریاضی (۱۱۱۱۰۵۳)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۴. فرض کنید  $\mathcal{E}$ ، تعداد نوزادان هر فرد، دارای توزیع دو جمله‌ای با  $n = ۳$  و  $P = \frac{1}{۳}$  باشد، احتمال انقراض را بیابید. (۱ نمره)

۵. در زنجیر مارکف دو حالتی  $\{X_n, n \geq 0\}$  با ماتریس احتمالات تغییر وضعیت زیر،  $E_0(T_0)$  را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$