

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱  
رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۷۰۲۹ - ۱۱۱۱۰۵۳  
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از ماشین حساب مجاز است.

امام علی<sup>(ع)</sup>: برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. فرض کنید  $F$  یک تابع توزیع باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

الف. اگر  $x < y$ ، آن‌گاه  $F(x) \leq F(y)$  به عبارت دیگر  $F$  نانزولی است.

ب. برای هر  $t \in \mathbb{R}$ :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(t-h) = F(t)$

ج. اگر  $a < b$ ، آن‌گاه  $p[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

د. به ازای هر  $a \in \mathbb{R}$ :  $p[X = a] = F(a) - F(a^-)$

۲. کدام یک از توزیع‌های پیوسته و گسسته دارای ویژگی بی‌حافظگی می‌باشند؟

الف. توزیع نمایی - توزیع هندسی

ب. توزیع نرمال - توزیع پواسون

ج. توزیع نمایی - توزیع دو جمله‌ای

د. توزیع نرمال - توزیع فوق هندسی

۳. فرض کنید  $X$  دارای توزیع یکنواخت بر  $(0,1)$  باشد، اگر  $X = x$ ، آن‌گاه  $Y$  بر  $(0, x)$  دارای توزیع یکنواخت است. مقدار  $E(Y)$  چقدر است؟

الف.  $\frac{1}{2}$

ب.  $\frac{2}{3}$

ج.  $\frac{1}{4}$

د.  $\frac{1}{3}$

۴. فرض کنید  $\{N(t) : t \geq 0\}$  فرآیند پواسونی با پارامتر  $\lambda > 0$  باشد. ضریب همبستگی بین  $N_s, N_t$  با فرض  $t < s$  کدام است؟

الف.  $\frac{s}{t}$

ب.  $\sqrt{\frac{s}{t}}$

ج.  $\sqrt{\frac{t}{s}}$

د.  $\frac{t}{s}$

۵. در مسئله ورشکستگی بازیکن، اگر  $a = 150, b = 100, p = q$  باشد احتمال ورشکستگی نفر با سرمایه  $b$  کدام است؟

الف.  $\frac{1}{4}$

ب.  $\frac{1}{2}$

ج.  $\frac{3}{5}$

د.  $\frac{2}{5}$

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۷۰۲۹ - ۱۱۱۱۰۵۳

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۶. زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و فضای حالت  $\{0, 1, 2, 3\}$  در نظر بگیرید، آن گاه

 $f_0^{(2)}$  کدام است؟الف.  $\frac{2}{3}$ ب.  $\frac{5}{9}$ ج.  $\frac{2}{9}$ د.  $\frac{1}{3}$ 

۷. در زنجیر مارکف  $\{X_n : n \geq 0\}$  با فضای حالت  $\ell = \{0, 1, 2\}$  و ماتریس احتمالهای انتقال یک مرحله ای زیر:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

اگر توزیع آغازین به صورت

X	0	1	2
$\pi_0(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

باشد، مقدار  $p[X_0 = 1 | X_1 = 1]$  برابر است با:

الف.  $\frac{1}{2}$ ب.  $\frac{2}{5}$ ج.  $\frac{6}{30}$ 

د. ۱

۸. فرض کنید  $\{X_n : n \geq 0\}$  زنجیر مارکف باشد آن گاه  $p\{X_0 = x | X_1 = y, X_2 = z\}$  برابر است با:

الف.  $p\{X_0 = a | X_1 = z\}$ ب.  $p\{X_1 = y | X_2 = z\}$ ج.  $p\{X_0 = x | X_1 = y\}$ د.  $p\{X_0 = x | X_2 = z\}$

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱  
رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۷۰۲۹ - ۱۱۱۱۰۵۳  
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱) استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۹. در زنجیر زاد و مرگ فرض کنید  $0 < p < 1$ ,  $q_x \equiv q = 1 - p$ ,  $p_x \equiv p$ ,  $x > 0$ ,  $r_x = 0$  برای  $x = 0$ ,  $p_0 = 1$  شرط اینکه زنجیر بازگشتی باشد، کدام است؟

الف.  $\frac{p}{q}$  ب.  $q \geq p$  ج.  $1 + q \geq p$  د.  $q \leq p$

۱۰. در فرآیند زاد و مرگ فرض کنید  $x \geq 0$ ,  $q_x = \frac{x}{x+1}$ ,  $p_x = \frac{x+1}{x+2}$  در مورد این زنجیر کدام گزینه نادرست است؟

الف. بازگشتی است ب. دارای خاصیت مارکوفی است ج. تحویل ناپذیر است د. گذرا است

۱۱. فرض کنید  $Z$  تعداد نوزادان هر فرد، دارای توزیع زیر باشد.

$\xi$	۰	۱	۲	۳
$P(Z = \xi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

احتمال انقراض برابر است با:

الف.  $\frac{3 - \sqrt{41}}{4}$  ب.  $\frac{-2 - \sqrt{41}}{4}$  ج.  $\frac{9}{8}$  د.  $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$

۱۲. اگر دو حالت  $x, y$  در زنجیر مارکوف چنان باشند که  $x \rightarrow y$  و  $\pi$  توزیع مانایی برای زنجیر باشد و  $\pi(x) = 0$  آن گاه:

الف.  $\pi(y) = \sum_x \pi(x) p_{xy}$  ب.  $\pi(y) = 0$  ج.  $\pi(y) = 1$  د.  $\pi(y) = \sum_x \pi(x) p_{xy}^{(n)}$

۱۳. در مورد زنجیر ارنفست کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف.  $\pi(1) \frac{1}{d} - \pi(0) = 0$  ب.  $\pi(x) = \begin{bmatrix} d \\ x \end{bmatrix} \pi(0)$  ج.  $\pi(1) = \frac{1}{p^d}$  د.  $\pi(x) = \begin{bmatrix} d \\ x \end{bmatrix} \left(\frac{1}{p}\right)^x \left(\frac{1}{p}\right)^{d-x}$

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۱۰۵۳ - ۱۱۱۷۰۲۹

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۱	۲
۳	۳
۳	۱
۴	۴

۱۴. در زنجیر مارکف دو حالتی  $\{X_n : n \geq 0\}$  با فضای حالت  $\{0, 1\}$  و با ماتریس احتمالات تغییر وضعیت $E_0(T_0)$  برابر است با:

د.  $\frac{4}{3}$

ج.  $\frac{9}{7}$

ب.  $\frac{1}{2}$

الف.  $\frac{17}{9}$

۱۵. در زنجیر دو حالتی  $\{X_n : n \geq 0\}$  با فضای حالت  $\{0, 1\}$  که ماتریس احتمالات تغییر وضعیت آن به صورت  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  است آن گاه:

- الف. حالت ۰ نادره‌ای و حالت ۱ دوره‌ای  
ب. هر دو حالت ۰ و ۱ نادره‌ای  
ج. هر دو حالت ۰ و ۱ دوره‌ای  
د. حالت ۰ دوره‌ای و حالت ۱ نادره‌ای

۱۶. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف. زنجیر ارنفست دوره‌ای با دوره ۲ است.

ب. زنجیر تعدیل یافته ارنفست دوره‌ای با دوره ۱ است.

ج. در قدم زدن تصادفی اگر به ازای هر  $x$ ،  $r_x = 0$  آنگاه زنجیر دوره‌ای با دوره ۲ است.د. در قدم زدن تصادفی اگر  $r_x > 0$  آن گاه زنجیر نادره‌ای است.

۱۷. شرط لازم و کافی برای آنکه زنجیر زمان - پیوسته دارای ویژگی مارکف باشد چیست؟

الف) توزیع زمانهای توقف پواسن باشد.

ب) توزیع زمانهای توقف هندسی باشد.

ج) توزیع زمانهای توقف دو جمله ای باشد.

د) توزیع زمانهای توقف نمایی باشد.

۱۸. فرآیندی دارای فضای حالت  $L = \{-1, 0, 1\}$  است. این فرآیند در هر یک از این حالت‌ها مدتی که دارای توزیع یکنواخت بر  $\{0, 1\}$  است توقف می‌کند، و سپس با احتمالاتی برابر به یکی از حالت‌های دیگر می‌رود. فرض کنید فرآیند در حالت ۰ باشد، مطلوب است

احتمال اینکه فرآیند در زمانی بین ۰ و  $\frac{1}{2}$  به حالت ۱ برود؟

د.  $\frac{1}{2}$

ج.  $\frac{1}{4}$

ب. ۱

الف. ۰

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۷۰۲۹ - ۱۱۱۱۰۵۳

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۱۹. اگر پارامترهای بینهایت کوچک به صورت زیر باشد:

$$q_{xy} = \begin{cases} \lambda & ; y = x + 1 \\ \mu & ; y = x - 1 \end{cases}$$

آن گاه  $Q_{xy}$  برابر است با:

$$Q_{x,x+1} = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \quad Q_{x,x-1} = \frac{\mu}{\lambda - \mu} \quad \text{الف.}$$

$$Q_{x,x+1} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad Q_{x,x-1} = \frac{\mu}{\lambda - \mu} \quad \text{ب.}$$

$$Q_{x,x+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad Q_{x,x-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{ج.}$$

$$Q_{x,x+1} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \quad Q_{x,x-1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{د.}$$

$$20. \text{ فرض کنید } L = \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ به ازای } x \neq y, \quad q_{xy} = \begin{cases} \lambda & y = x + 1 \\ \mu & y = 0, (x \neq 0) \\ 0 & \text{در غیر} \end{cases} \text{ آن گاه توزیع مانا برابر است با:}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)\left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)^x \quad \text{ب.}$$

$$\left(\frac{\mu}{\lambda - \mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^x \quad \text{د.}$$

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^x \quad \text{الف.}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)\left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}\right)^x \quad \text{ج.}$$

نام درس: فرآیندهای تصادفی ۱  
رشته تحصیلی و کد درس: آمار - ریاضی محض و کاربردی ۱۱۱۷۰۲۹ - ۱۱۱۱۰۵۳  
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗  
کد سری سؤال: یک (۱)  
استفاده از ماشین حساب مجاز است.

## سؤالات تشریحی

۱. فرض کنید  $X$  مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و ..... را اختیاری کند ثابت کنید که: (۱ نمره)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X \geq K)$$

۲. فرآیند پواسن را به طور کامل تعریف کنید و تابع میانگین و تابع همبستگی فرآیند را محاسبه کنید. (۲ نمره)

۳. زنجیر مارکف  $\{X_n : n \geq 0\}$  با ماتریس احتمال انتقال زیرو با فضای حالت  $\{0, 1, 2, 3\}$  مفروض است (۲ نمره)

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف. رده‌های بازگشتی و گذرا را بیابید.

ب. احتمالات جذب را محاسبه کنید.

۴. زنجیر  $\{X_n : n \geq 0\}$  با احتمال تغییر وضعیت زیر مفروض است (۲ نمره)

$$p_{xy} = \begin{cases} p & y = x + 1 \\ q & y = 0 \end{cases} \quad 0 < p < 1, \quad p + q = 1$$

مطلوب است: الف. توزیع مانای این زنجیر

ب. متوسط مراحل که طول می‌کشد تا از حالت  $y$  به حالت  $y$  بازگردیم.

ج. گراف زنجیر را رسم کنید.

۵. ثابت کنید به ازای هر  $t, s$  نامنفی و  $x, y$  از فضای حالت داریم: (۱ نمره)

$$p_{xy}(t+s) = \sum_{z \in L} p_{xz}(t)p_{zy}(s)$$